Technische Grundlagen der Informatik – Kapitel 2

Prof. Jan Peters, Ph.D.
Fachgebiet Intelligente Autonome Systeme (IAS)
Fachbereich Informatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 14/15

LEHRE WIKI TEST IN ZWEI FOLIEN

Meisenantworten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Störende Zuspätkommer disziplinieren! *Gerne, Chris hat noch nicht gefrühstückt und ist bestimmt hungrig*…
- Ist dieser Satz falsch? *Nein, nur unentscheidbar*…
- Mars oder Bounty als Ersatz ☺ … *wofür*?
- Trefferstatistik: *Super! Beim nächsten Mal bitte nach Raumflügel und Sitzreihe aufschlüßeln und kausale Effekte untersuchen.*
- Vorschläge:
  - Musik während Abstimmzeit? *Hmm*…
  - Server überlastet? *Ich muss ein sequentielles Code-Stück entfernen*.
  - Lehre-Wiki-Onlinetest hackbar! *Ich wäre enttäuscht von Euch, wenn ihr das nicht bemerkt hättet.*
  - Automatic reload! *Denke drüber nach*…
  - Sichtbarkeit der Antworten. *Arbeite dran*…
  - Andere? *Bin dran*!

Kapitel 2: Kombinatorische Logik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Einleitung
- Boole'sche Gleichungen
- Boole'sche Algebra
- Von Logik zu Gattern
- Mehrstufige kombinatorische Logik
- X's und Z's
- Karnaugh Diagramme
- Kombinatorische Grundelemente
- Zeitverhalten

LEHRE WIKI FRAGE

- Bitte jetzt auf LEHRE WIKI eine Frage beantworten!

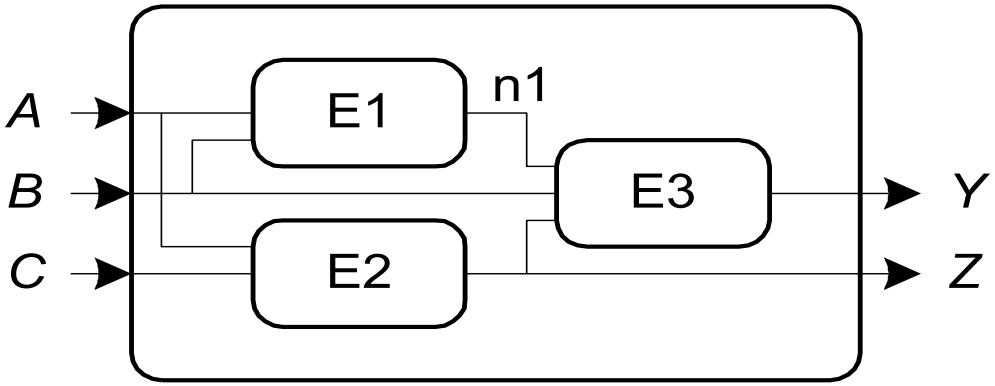
Einleitung

Eine logische Schaltung ist zusammengesetzt aus

- Eingängen
- Ausgängen
- Spezifikation der Funktion
- Spezifikation des Zeitverhaltens

Schaltungen

- Verbindungsknoten (*node*)
  - Eingangs-Terminals: *A*, *B*, *C*
  - Ausgangs-Terminals: *Y*, *Z*
  - Interne Knoten: n1
- Schaltungselemente
  - E1, E2, E3
  - Jedes wiederum eine Schaltung (Hierarchie!)



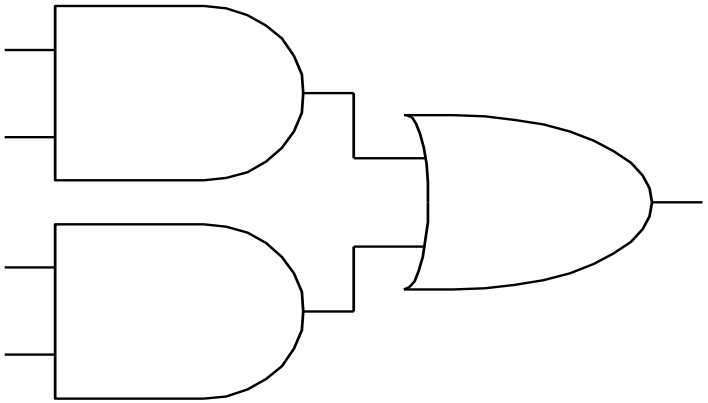
Arten von logischen Schaltungen

- Kombinatorische Logik
  - Zustandslos
  - Ausgänge hängen nur von aktuellen Eingangswerten ab
- Sequentielle Logik
  - Speichert einen Zustand
  - Ausgänge hängen ab von aktuellen Eingangswerten und gespeichertem Zustand
    - Also damit auch von vorherigen Eingangswerten

Regeln für kombinatorische Zusammensetzung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Jedes Schaltungselement ist selbst kombinatorisch
- Jeder Verbindungsknoten der Schaltung ist entweder
  - … ein Eingang in die Schaltung
  - … oder an ein vorwärtsgerichtetes Ausgangsterminal eines Schaltungselements angeschlossen
- Die Schaltung enthält keine Zyklen
  - Jeder Pfad durch die Schaltung besucht jeden Verbindungsknoten maximal einmal
- Beispiel

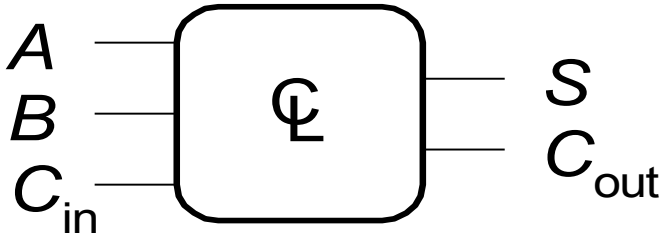


Boole'sche Gleichungen

- Beschreiben Ausgänge als Funktion der Eingänge

- Beispiel:

$$S = F_1(A, B, C_{in})$$
$$C_{out} = F_2(A, B, C_{in})$$



$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$
$$C_{out} = AB + AC_{in} + BC_{in}$$

Grundlegende Definitionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Komplement: Boole'sche Variable mit einem Balken (invertiert)
  $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$
- Literal: Variable oder ihr Komplement
  A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$
- Implikant: Produkt von Literalen
  $AB\overline{C}$, $A\overline{C}$, BC
- Minterm: Produkt (UND, Konjunktion) über alle Eingangsvariablen
  ABC, $AB\overline{C}$, $\overline{A}BC$
- Maxterm: Summe (ODER, Disjunktion) über alle Eingangsvariablen
  $(A+\overline{B}+\overline{C})$, $(A+B+\overline{C})$, $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

Disjunktive Normalform (DNF)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen Minterm
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale
- Der Minterm ist WAHR genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Disjunktion (Summe, ODER) der Minterme, die am Ausgang WAHR liefern
- Schema: Summe aus Produkten (SOP)

A	B	Y	minterm
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$
0	1	1	$\overline{A}\ B$
1	0	0	$A\ \overline{B}$
1	1	1	$A\ B$

$Y = F(A, B) =$

Disjunktive Normalform (DNF)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen Minterm
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale
- Der Minterm ist WAHR genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Disjunktion (Summe, ODER) der Minterme, die am Ausgang WAHR liefern
- Schema: Summe aus Produkten (SOP)

A	B	Y	minterm
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$
0	1	1	$\overline{A}\ B$
1	0	0	$A\ \overline{B}$
1	1	1	$A\ B$

$Y = F(A, B) =$

Disjunktive Normalform (DNF)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen Minterm
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale
- Der Minterm ist WAHR genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Disjunktion (Summe, ODER) der Minterme, die am Ausgang WAHR liefern
- Schema: Summe aus Produkten (SOP)

A	B	Y	minterm
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$
0	1	1	$\overline{A}\ B$
1	0	0	$A\ \overline{B}$
1	1	1	$A\ B$

$$Y = F(A, B) = \overline{A}B + AB$$

Konjunktive Normalform (KNF)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Products-of-sums form (POS)*
- Alle Boole'schen Funktionen können in KNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen Maxterm
  - Jeder Maxterm ist die Disjunktion (Summe, ODER) von Literalen
- Der Maxterm ist FALSCH genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Konjunktion (Produkt, UND) der Maxterme, die am Ausgang FALSCH liefern
- Schema: Produkt aus Summen (POS)

A	B	Y	maxterm
0	0	0	$A + B$
0	1	1	$A + \overline{B}$
1	0	0	$\overline{A} + B$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$

$Y = F(A, B) =$

Konjunktive Normalform (KNF)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Products-of-sums form (POS)*
- Alle Boole'schen Funktionen können in KNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen Maxterm
  - Jeder Maxterm ist die Disjunktion (Summe, ODER) von Literalen
- Der Maxterm ist FALSCH genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Konjunktion (Produkt, UND) der Maxterme, die am Ausgang FALSCH liefern
- Schema: Produkt aus Summen (POS)

A	B	Y	maxterm
0	0	0	$A + B$
0	1	1	$A + \overline{B}$
1	0	0	$\overline{A} + B$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$

$$Y = F(A, B) = (A + B)(\overline{A} + B)$$

Beispiel für Boole'sche Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Sie prüfen das Mittagsangebot der Mensa
  - Sie werden dort nicht essen gehen ($\overline{E}$)
  - Wenn nicht mehr geöffnet ist ($\overline{O}$) oder
  - Es nur Corned Beef-Variationen gibt (C)
- Stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf, ob Sie in die Mensa gehen

O	C	E
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Beispiel für Boole'sche Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Sie prüfen das Mittagsangebot der Mensa
  - Sie werden dort nicht essen gehen ($\overline{E}$)
  - Wenn nicht mehr geöffnet ist ($\overline{O}$) oder
  - Es nur Corned Beef-Variationen gibt (C)
- Stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf, ob Sie in die Mensa gehen

O	C	E
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

LEHRE WIKI TEST IN ZWEI FOLIEN

DNF (*SOP*) und KNF (*POS*) Formen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- DNF – Disjunktive Normalform (*sum-of-products, SOP)*

O	*C*	*E*	minterm
0	0	0	$\overline{O}\ \overline{C}$
0	1	0	$\overline{O}\ C$
1	0	1	$O\ \overline{C}$
1	1	0	$O\ C$

- KNF – Konjunktive Normalform (*product-of-sums, POS*)

O	*C*	*Y*	maxterm
0	0	0	$O + C$
0	1	0	$O + \overline{C}$
1	0	1	$\overline{O} + C$
1	1	0	$\overline{O} + \overline{C}$

DNF (*SOP*) und KNF (*POS*) Formen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- DNF – Disjunktive Normalform (*sum-of-products, SOP)*

O	C	E	minterm
0	0	0	$\overline{O}\ \overline{C}$
0	1	0	$\overline{O}\ C$
1	0	1	$O\ \overline{C}$
1	1	0	$O\ C$

$$E = O\overline{C}$$

- KNF – Konjunktive Normalform (*product-of-sums, POS*)

O	C	E	maxterm
0	0	0	$O + C$
0	1	0	$O + \overline{C}$
1	0	1	$\overline{O} + C$
1	1	0	$\overline{O} + \overline{C}$

$$E = (O + C)(O + \overline{C})(\overline{O} + \overline{C})$$

LEHRE WIKI FRAGE

- Bitte jetzt auf LEHRE WIKI eine Frage beantworten!

Boole'sche Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Axiome und Sätze, hier zum Ziel der Vereinfachung boole'scher Gleichungen
- Wie die übliche Algebra
  - Teilweise einfacher, da hier nur zwei Werte
- Axiome und Sätze haben jeweils duale Entsprechung:
  - Tausche AND/OR, tausche 0/1

Axiome und Sätze der Boole'schen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

	Axiom		Dual	Name
A1	$B = 0$ if $B \neq 1$	A1′	$B = 1$ if $B \neq 0$	**Dualitätsgesetz**
A2	$\overline{0} = 1$	A2′	$\overline{1} = 0$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	A3′	$1 + 1 = 1$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	A4′	$0 + 0 = 0$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	A5′	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	AND/OR

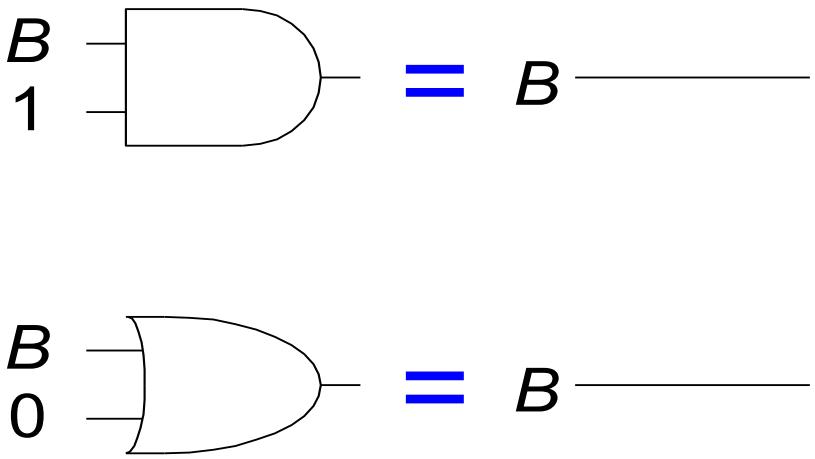
	Satz		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	**Neutralitätsgesetz**
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	**Extremalgesetz**
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	**Idempotenzgesetz**
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		**Involution**
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	**Komplementärgesetz**

T1: Neutralitätsgesetz

- $B \bullet 1 =$
- $B + 0 =$

T1: Neutralitätsgesetz

- B ● 1 = B
- B + 0 = B

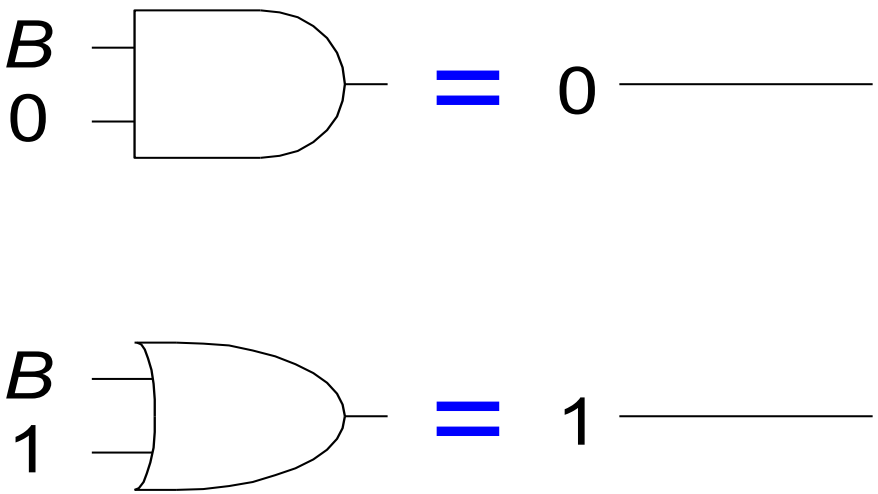


T2: Extremalgesetz

- $B \bullet 0 =$
- $B + 1 =$

T2: Extremalgesetz

- B ● 0 = 0
- B + 1 = 1

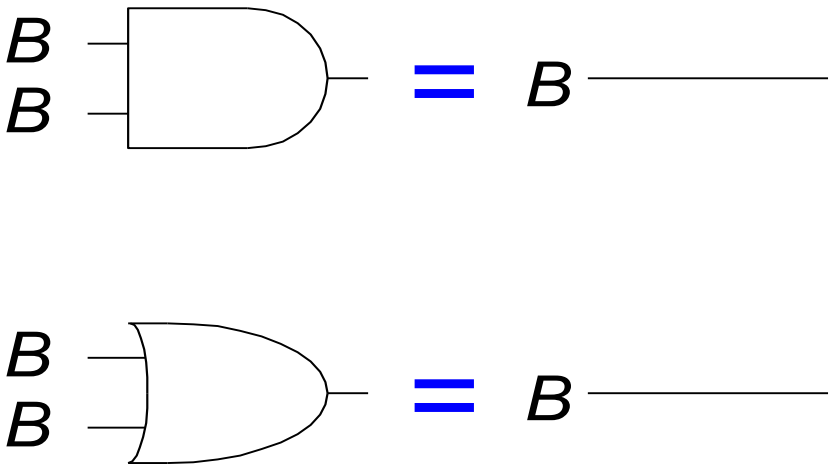


T3: Idempotenzgesetz

- $B \bullet B =$
- $B + B =$

T3: Idempotenzgesetz

- B ● B = B
- B + B = B

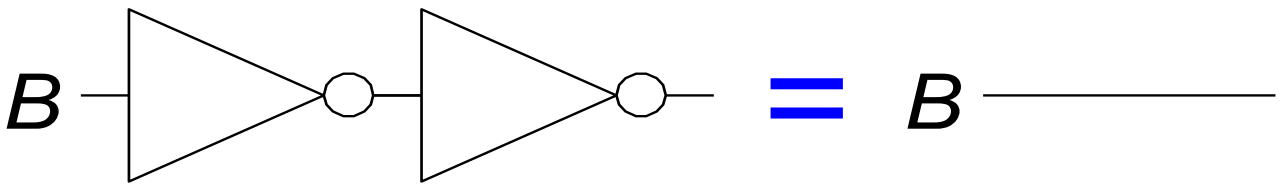


T4: Involution (Selbstinversion)

- $\overline{\overline{B}} =$

T4: Involution (Selbstinversion)

- $\overline{\overline{B}} = B$

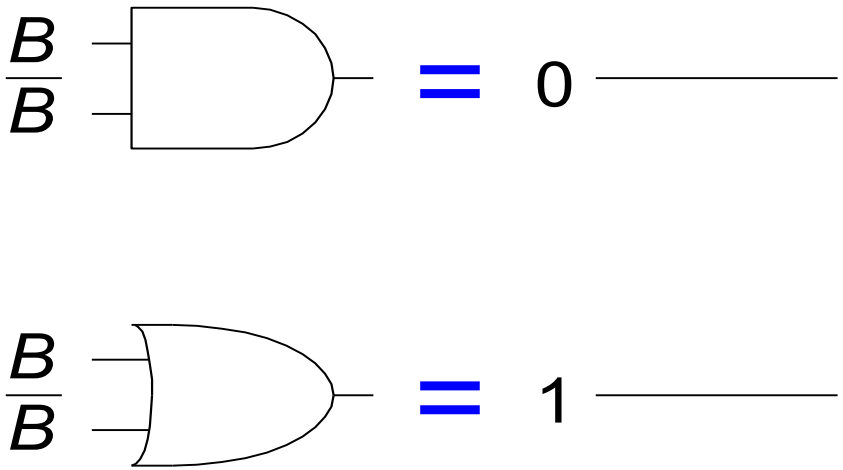


T5: Komplementärgesetz

- $B \bullet \overline{B} =$
- $B + \overline{B} =$

T5: Komplementärgesetz

- $B \bullet \overline{B} = 0$
- $B + \overline{B} = 1$



Sätze der Boole'schen Algebra mit einer Variablen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

	Satz		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	**Neutralitätsgesetz**
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	**Extremalgesetz**
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	**Idempotenzgesetz**
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		**Involution**
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	**Komplementärgesetz**

Sätze der Boole'schen Algebra mit mehreren Variablen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

	Satz		Dual	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	T6′	$B + C = C + B$	**Kommutativgesetz**
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	T7′	$(B + C) + D = B + (C + D)$	**Assoziativgesetz**
T8	$(B \bullet C) + B \bullet D = B \bullet (C + D)$	T8′	$(B + C) \bullet (B + D) = B + (C \bullet D)$	**Distributivgesetz**
T9	$B \bullet (B + C) = B$	T9′	$B + (B \bullet C) = B$	**Absorptionsgesetz**
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	T10′	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	**Zusammenfassen**
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D)$ $= B \bullet C + \overline{B} \bullet D$	T11′	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D)$ $= (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	**Konsensusregeln**
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots}$ $= (\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots)$	T12′	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots}$ $= (\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2})$	**De Morgansche Gesetze**

Beispiel 1: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $Y = AB + \overline{A}B$

Beispiel 1: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $Y = AB + \overline{A}B$

$= B(A + \overline{A})$	T8	Distributivgesetz
$= B(1)$	T5’	Komplementärgesetz
$= B$	T1	Identitätsgesetz

Beispiel 2: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $Y \quad = A(AB + ABC)$

LEHRE WIKI TEST IN ZWEI FOLIEN

Beispiel 2: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $Y = A(AB + ABC)$

$= A(AB(1 + C))$	T8 Distributivgesetz
$= A(AB(1))$	T2' Extremalgesetz
$= A(AB)$	T1 Identitätsgesetz
$= (AA)B$	T7 Assoziativgesetz
$= AB$	T3 Idempotenzgesetz