Division

- Leidlich einfach, dann aber sehr langsam
- Sehr kompliziert, dann wenigstens etwas schneller
  - Aber immer noch deutlich langsamer als z.B. Multiplikation

- Für Einführungsveranstaltung eher ungeeignet
  - Beschreibung im Buch auch ziemlich schlecht …

- Hier nur aus dem Orbit gestreift
  - Auszug aus

Behrooz Parhami
Computer Arithmetic: Algorithms and Hardware Designs
Oxford U. Press, 2nd ed., 2010, ISBN 978-0-19-532848-6

Idee: Quotient ziffernweise bestimmen

- 2487 : 10 =

- Von höher- zur niederwertigen Stellen
  - 100er, 10er, 1er

Notation für Erklärung der Division

z	Dividend	$z_{2k-1}z_{2k-2} \; . \; . \; . \; z_3z_2z_1z_0$
d	Divisor	$d_{k-1}d_{k-2} \ldots d_1d_0$
q	Quotient	$q_{k-1}q_{k-2} \ldots q_1q_0$
s	Rest, $z - (d\,q)$	$s_{k-1}s_{k-2} \ldots s_1s_0$

- Dividiere vorzeichenlose Zahlen

	Dividend	$\boldsymbol{z}$	(2k Bit breit)
durch	**Divisor**	$\boldsymbol{d}$	(k Bit breit)

- Ergebnis

Quotient	$\boldsymbol{q}$	(k Bit breit)
Rest	$\boldsymbol{s}$	(k Bit breit)

- Es gilt

$$z = q\,d + s$$

Auftreten von Überläufen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel k=8: 16b Dividend, 8b Divisor, 8b Quotient, 8b Rest

- Problem: Damit nicht alle Ergebniswerte repräsentierbar
  - Operanden: z = 65534, d = 2
  - Ergebnis: q = 32767 **nicht mehr in 8b darstellbar, Überlauf!**,
    s = 0

- Vorgehensweise: Vorher auf darstellbares Ergebnis prüfen
  - Vermeidet Überlauf
  - Fängt auch Division durch Null ab

Abfangen von Überläufen

- Maximalwert für Dividenden

$$z = q\,d + s$$

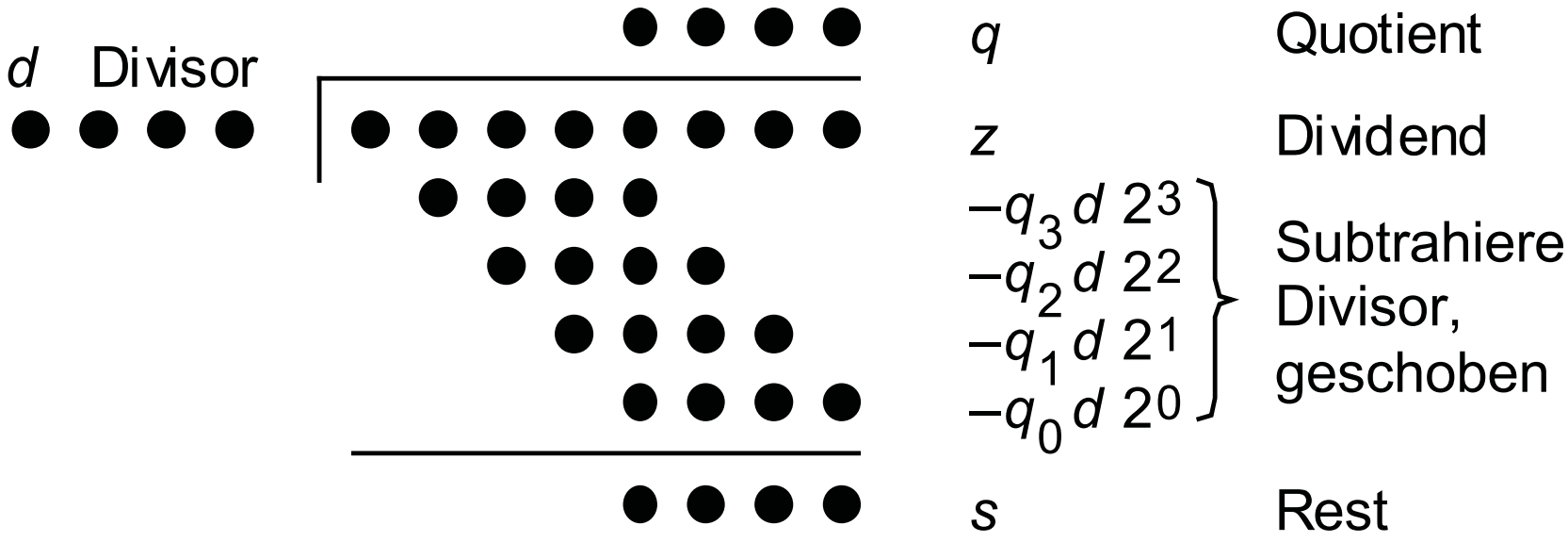
- Maximalwert für q (k Bit breit): $2^k - 1$
- Maximalwert für s (k Bit breit): $d - 1$

- $z_{max} = (2^k-1)\,d + d - 1 = 2^k\,d - 1$

- $z < z_{max} + 1$ ➔ Wenn $z < 2^k$ d, dann kein Überlauf

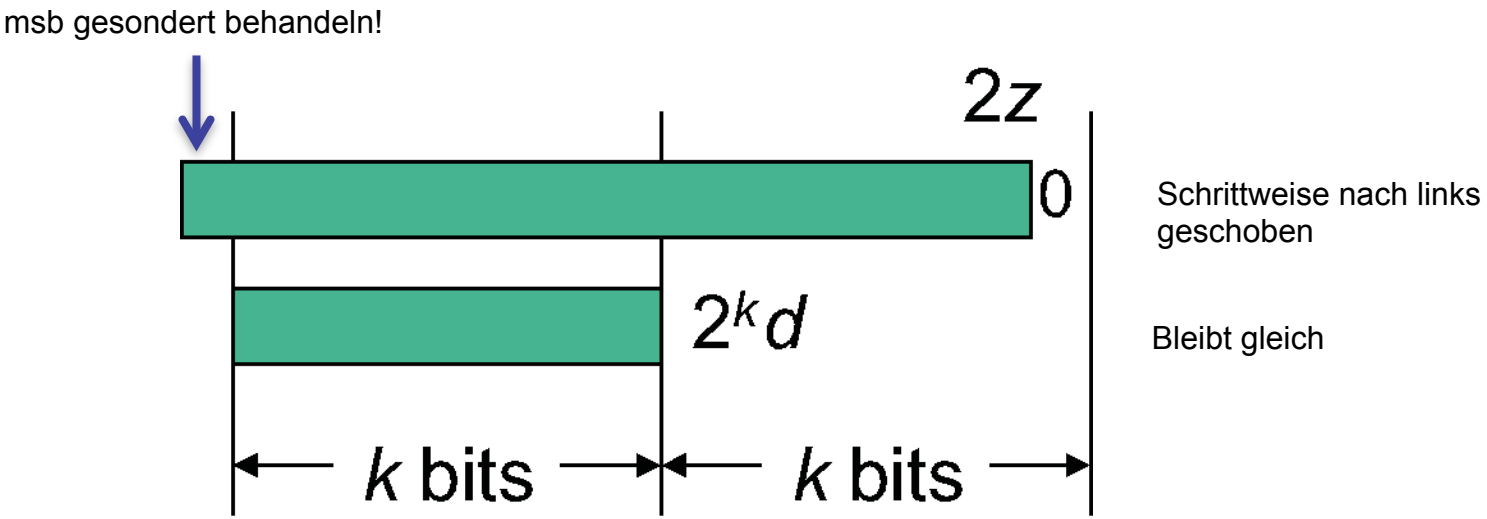
Generelle Vorgehensweise für Division

- Hier: Einfaches, aber langsames Verfahren



Optimierung

- Schiebe nicht Divisor nach rechts
- … sondern partiellen Rest nach links



Algorithmus für 2 *k* Bit Dividend / *k* Bit Divisor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Schritt 0:** Initialisiere partiellen Rest mit Dividend

  $s^{(0)} = z$

- **Schritt *j*:** Schiebe partiellen Rest ein Bit nach links und subtrahiere versuchsweise um *k* Bit verschobenen Divisor.
  Falls Differenz >=0: $q_{k-j} = 1$, sonst $=0$

  $s^{(j)} = 2\, s^{(j-1)} - q_{k-j}\, (2^k\, d)$

- **Schritt *k*:** Ende

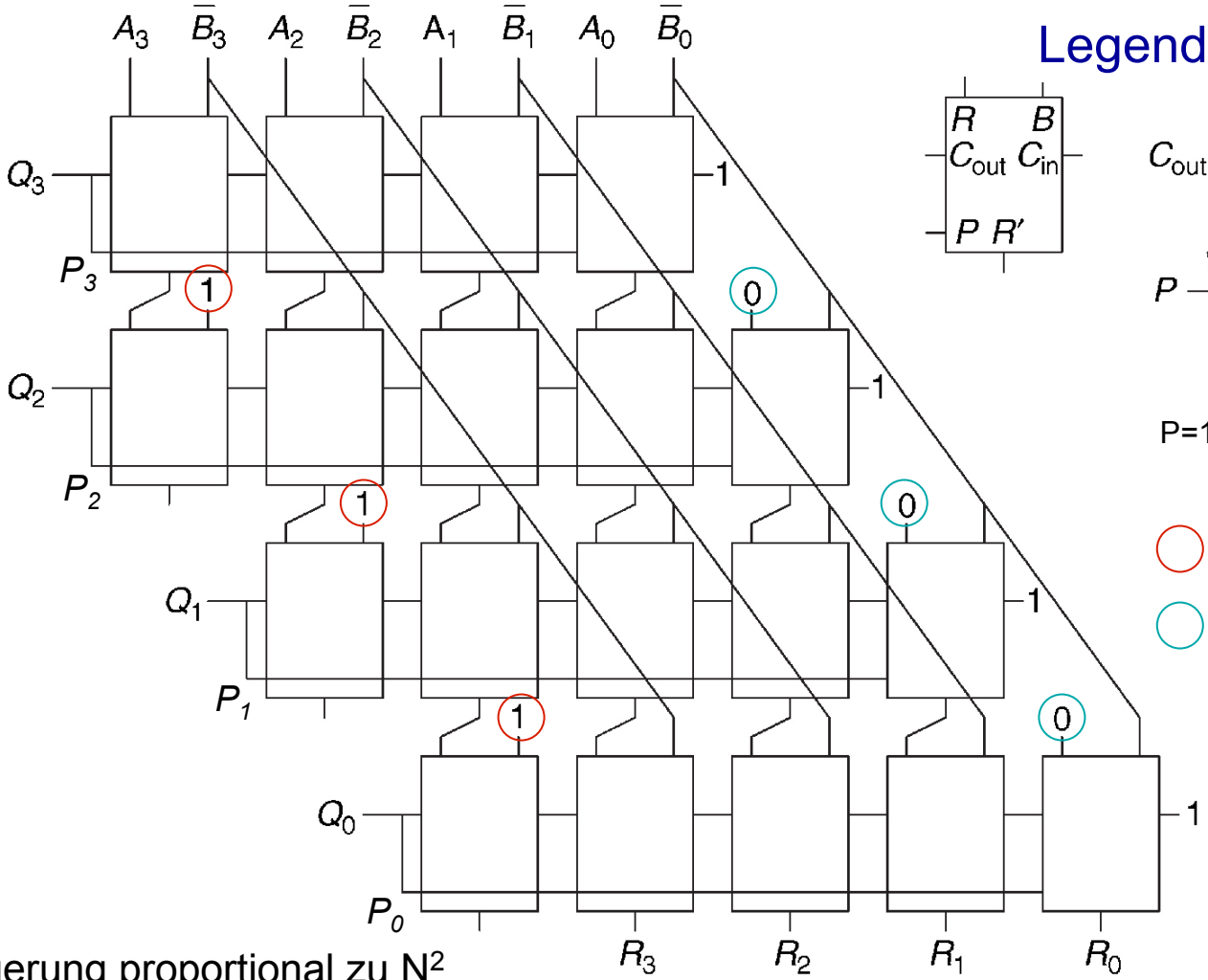
  $s^{(k)} = 2^k\, s^{(0)} - q\, (2^k\, d) = 2^k\, (z - q\, d) = 2^k\, s$

LEHRE WIKI TEST IN DREI FOLIEN

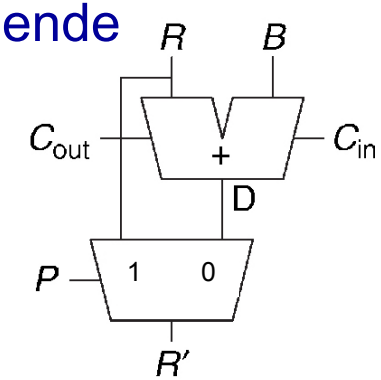
Beispiel 8b Dividend, 4b Divisor: 117 / 10

	z	0 1 1 1 0 1 0 1	
	$2^4 d$	1 0 1 0	
	==========		
Schritt 0	$s^{(0)}$	0 1 1 1 0 1 0 1	
	$2s^{(0)}$	0 1 1 1 0 1 0 1	
Schritt 1	$-q_3 2^4 d$	1 0 1 0	$\{q_3 = 1\}$
	$s^{(1)}$	0 1 0 0 1 0 1	
	$2s^{(1)}$	0 1 0 0 1 0 1	
Schritt 2	$-q_2 2^4 d$	0 0 0 0	$\{q_2 = 0\}$
	$s^{(2)}$	1 0 0 1 0 1	
	$2s^{(2)}$	1 0 0 1 0 1	
Schritt 3	$-q_1 2^4 d$	1 0 1 0	$\{q_1 = 1\}$
	$s^{(3)}$	1 0 0 0 1	
	$2s^{(3)}$	1 0 0 0 1	
Schritt 4	$-q_0 2^4 d$	1 0 1 0	$\{q_0 = 1\}$
	$s^{(4)}$	0 1 1 1	
	s	0 1 1 1	
	q	1 0 1 1	
	==========		

Kombinatorischer 4 x 4 Array-Dividierer: A / B



Legende



P=1 wenn Differenz negativ ist

Sign-extension von B

Left-shift von R‘

Verzögerung proportional zu N^2

LEHRE WIKI FRAGE

- Bitte jetzt auf LEHRE WIKI eine Frage beantworten!

Zahlensysteme

- Bisher kennengelernt
  - Positive Zahlen
    - Vorzeichenlose Binärdarstellung
  - Negative Zahlen
    - Zweierkomplement
    - Darstellung als Vorzeichen/Betrag
- Wo bleiben Brüche?
  - Rationale Zahlen?
- Reelle Zahlen?

Zahlen mit Bruchanteilen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zwei gängige Darstellungen:
  - Festkomma (*fixed-point*):

    Position des Kommas bleibt konstant

    Beispiel: Dezimalsystem, 2 Vorkomma-, 3 Nachkommastellen

    2,000 99,999 0,000 -2,718 nicht: 3,1415 365,250

  - Gleitkomma *(floating-point)*

    Position des Kommas kann wandern, ist stets rechts der höchstwertigen Stelle <> 0. Angabe der Position des Kommas in Exponentenschreibweise

    Beispiel: Dezimalsystem, insgesamt 5 Stellen

    $2*10^0$ $9{,}9999*10^1$ $0*10^0$ $-2{,}718*10^0$ $3{,}1415*10^0$ $3{,}6525*10^2$ $5*10^6$

    nicht: $3{,}14159*10^0$

    Auch: Obergrenze für Exponenten, keine beliebig großen Zahlen darstellbar

Binäre Festkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Darstellung von 6,75 mit 4b für ganzen Anteil und 4b für Binärbruch:

01101100

0110 , 1100

$$2^{2} + 2^{1} + 2^{-1} + 2^{-2} = 6{,}75$$

- Binärkomma wird nicht explizit dargestellt
  - Position wird durch Format impliziert (hier: 4,4)
- Alle Leser und Schreiber von Festkommadaten müssen dasselbe Format verwenden

Binäre Festkommazahlen

- Beispiel: Stelle $7{,}5_{10}$ in 8b im binären 4,4-Festkommaformat dar

Binäre Festkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel: Stelle 7.5_{10} in 8b im 4,4-Festkommaformat dar

01111000

Vorzeichenbehaftete Festkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie bei ganzen Zahlen: Zwei Darstellungen möglich
  - Vorzeichen/Betrag
  - Zweierkomplement
- Stelle -7.5_{10} in 8b als 4,4-Festkommazahl dar
  - Vorzeichen/Betrag:
  - Zweierkomplement:

Vorzeichenbehaftete Festkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie bei ganzen Zahlen: Zwei Darstellungen möglich
  - Vorzeichen/Betrag
  - Zweierkomplement

- Stelle -7.5_{10} in 8b als 4,4-Festkommazahl dar

  - Vorzeichen/Betrag:

    11111000

  - Zweierkomplement:

Vorzeichenbehaftete Festkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie bei ganzen Zahlen: Zwei Darstellungen möglich
  - Vorzeichen/Betrag
  - Zweierkomplement

- Stelle -7.5_{10} in 8b als 4,4-Festkommazahl dar

  - Vorzeichen/Betrag:

    11111000

  - Zweierkomplement:

1. +7.5:	01111000
2. Invertieren:	10000111
3. Addiere 1 zu lsb:	+ 1
	10001000

Binäre Gleitkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Binärkomma liegt immer genau rechts von höchstwertiger 1
- Ähnlich zur wissenschaftlichen Darstellung von Dezimalbrüchen
- Beispiel: 4.387.263 in wissenschaftlicher Darstellung

$$4{,}387263 \times 10^6$$

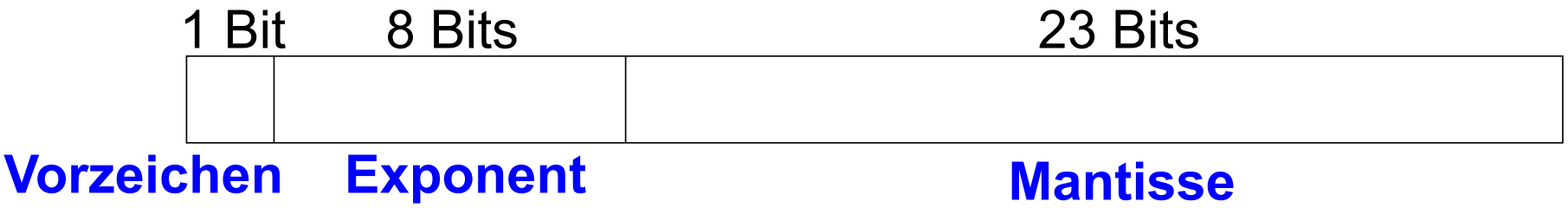
- Allgemeine Schreibweise:

$$\pm M \times B^E$$

wobei

- **M** = Mantisse
- **B** = Basis
- **E** = Exponent
- Im Beispiel: M = 4,387263 , B = 10, and E = 6

Binäre Gleitkommazahlen



- **Beispiel:** Stelle den Wert 228_{10} als 32b-Gleitkommazahl dar
  - Im folgenden drei Versionen, nur die letzte davon ist eine Standarddarstellung!
    - IEEE 754, *single precision format*

Binäre Gleitkommadarstellung: 1. Versuch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wandele Dezimalzahl in Binärdarstellung um:
  - $228_{10} = 11100100_2 = 1{,}11001 \times 2^7$
- Trage nun Daten in die Felder des 32b Wortes ein:
  - Vorzeichenbit ist positiv (0)
  - Die 8b des Exponenten stellen den Wert 7 dar
  - Die verbliebenen 23 Bit stellen die Mantisse dar

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	00000111	111 0010 0000 0000 0000 0000
Vor-zeichen	**Exponent**	**Mantisse**

Binäre Gleitkommadarstellung: 2. Versuch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beobachtung: Das erste Bit der Mantisse ist so immer 1
  - $228_{10} = 11100100_2 = \mathbf{1{,}11001} \times 2^7$
- Man kann sich das explizite Abspeichern der führenden 1 sparen
  - Die führende 1 wird implizit immer als präsent angenommen
- Stattdessen: Speichere nur den Bruchanteil (die "Nachkommastellen") explizit ab

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	00000111	110 0100 0000 0000 0000 0000
Vor-zeichen	**Exponent**	**Bruchanteil**

Binäre Gleitkommadarstellung: 3. Versuch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Exponent kann auch negativ sein
  - Idee: Zweierkomplement. Wäre möglich, hat aber praktische Nachteile
  - Besser: Exponent relativ zu konstantem Grundwert (Exzess, Biaswert) angeben
- Hier: Biaswert = 127 (01111111_2)
  - Exponent mit Bias = Biaswert + Exponent
  - Exponent 7 wird also gespeichert als:

$$127 + 7 = 134 = 0x10000110_2$$

- Damit **IEEE 754 32-bit Gleitkommadarstellung** von 228_{10}

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	10000110	110 0100 0000 0000 0000 0000
Vorz.	**Exponent mit Bias**	**Bruchanteil**

Beispiel IEEE 754 Gleitkommadarstellung

- Stelle -58.25_{10} gemäß dem IEEE 754 32-bit Gleitkommastandard dar

Beispiel IEEE 754 Gleitkommadarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Stelle -58.25_{10} gemäß dem IEEE 754 32-bit Gleitkommastandard dar
- 1. Wandele in Binärdarstellung um:
  - $58{,}25_{10}$ =
- 2. Trage Felder des 32b Gleitkommawortes ein:
  - Vorzeichen:
  - 8 Bits für Exponent:
  - 23 Bits für Bruchanteil:

1 Bit	8 Bits	23 Bits
Vorz.	**Exponent**	**Bruchanteil**

- In Hexadezimalschreibweise:

Beispiel IEEE 754 Gleitkommadarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Stelle -58.25_{10} gemäß dem IEEE 754 32-bit Gleitkommastandard dar
- 1. Wandele in Binärdarstellung um:
  - $58{,}25_{10} = 111010{,}01_2 = 1{,}1101001 \times 2^5$
- 2. Trage Felder des 32b Gleitkommawortes ein:
  - Vorzeichen: 1 (negativ)
  - 8 Bits für Exponent: $(127 + 5) = 132 = 10000100_2$
  - 23 Bits für Bruchanteil: 110 1001 0000 0000 0000 0000

1 Bit	8 Bits	23 Bits
1	100 0010 0	110 1001 0000 0000 0000 0000
Vorz.	**Exponent**	**Bruchanteil**

- In Hexadezimalschreibweise: 0xC2690000

IEEE 754 Gleitkommadarstellung: Sonderfälle

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Nicht alle benötigten Werte nach dem Schema darstellbar
  - Beispiel: 0, hat keine führende 1

Wert	Vorz.	Exponent	Bruchanteil
0	X	00000000	00000000000000000000000
∞	0	11111111	00000000000000000000000
- ∞	1	11111111	00000000000000000000000
NaN	X	11111111	Ein Wert <> 0

NaN steht für “Not a Number” und stellt häufig Rechenfehler dar

Beispiele: √-1 oder log(-5).

Genauigkeit der Gleitkommadarstellungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Einfache Genauigkeit (*single-precision*):
  - 32-bit Darstellung
  - 1 Vorzeichenbit, 8 Exponentenbits, 23 Bits für Bruchanteil
  - Exponentenbias = 127

- Doppelte Genauigkeit (*double-precision*):
  - 64-bit Darstellung
  - 1 Vorzeichenbit, 11 Exponentenbits, 52 Bits für Bruchanteil
  - Exponentenbias = 1023

Rundungsmodi für Gleitkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Overflow: Betrag der Zahl ist zu groß, um korrekt dargestellt zu werden
- Underflow: Zahl ist zu nahe bei 0, um korrekt dargestellt zu werden

- Rundungsmodi:
  - Abrunden zu minus Unendlich
  - Aufrunden zu plus Unendlich
  - Hin zu Null
  - Hin zu nächster darstellbarer Zahl

- **Beispiel:** Runde 1,100101 ($1{,}578125_{10}$) auf 3 Bits Bruchanteil
  - Ab: 1,100
  - Auf: 1,101
  - Zu Null: 1,100
  - Zu nächster: 1,101 (1,625 liegt näher an 1,578125 als an 1,5)

Addition von Gleitkommazahlen mit gleichem Vorzeichen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Exponenten- und Bruchanteilfelder aus Gleitkommawort extrahieren
2. Bruchanteil um führende 1 erweitern, um Mantisse zu bilden
3. Vergleiche Exponenten
4. Schiebe Mantisse von Zahl mit kleinerem Exponenten nach rechts (bis Exponenten gleich sind)
5. Addiere Mantissen
6. Normalisiere Mantisse und passe Exponent an, falls nötig
7. Runde Ergebnis entsprechend dem gewählten Rundungsmodus
8. Baue Gleitkommawort aus Exponenten und Bruchanteil des Ergebnisses

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Addiere die beiden Gleitkommazahlen

0x3FC00000
0x40500000

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Extrahiere Exponenten und Bruchanteile aus 32b Worten

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	01111111	100 0000 0000 0000 0000 0000
Vorz.	**Exponent**	**Bruchanteil**

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	10000000	101 0000 0000 0000 0000 0000
Vorz.	**Exponent**	**Bruchanteil**
S	**E**	**F**

1. Zahl (N1): S1 = 0, E1 = 127 (= × 2^0), F1 = ,1

2. Zahl (N2): S2 = 0, E2 = 128 (= × 2^1), F2 = ,101

2. Erweitere Bruchanteile um führende 1, um Mantissen zu bilden

M1: 1,1

M2: 1,101

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Vergleiche Exponenten

   E2 – E1 = 128 – 127 = 1, N1 muss also um ein Bit geschoben werden

4. Mantisse von Zahl mit kleinerem Exponenten entsprechend nach rechts schieben

   schiebe M1: 1,1 >> 1 = 0,11 ($\times 2^1$)

5. Mantissen addieren (haben jetzt den gleichen Exponenten)

$$
\begin{array}{rr}
 & 0{,}11 \times 2^1 \\
+ & 1{,}101 \times 2^1 \\
\hline
 & 10{,}011 \times 2^1
\end{array}
$$

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Normalisiere Mantisse und passe Exponenten an, falls nötig
   $10{,}011 \times 2^1 = 1{,}0011 \times 2^2$
7. Runde Ergebnis entsprechend Rundungsmodus
   Hier nicht nötig (passt in 23b)
8. Baue neues Gleitkommawort für Ergebnis aus Exponent und Mantisse
   $S = 0$, $E = 2 + 127 = 129 = 10000001_2$, $F = 001100..0$

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	10000001	001 1000 0000 0000 0000 0000
Vorz.	**Exponent**	**Bruchanteil**

In Hexadezimalschreibweise: 0x40980000